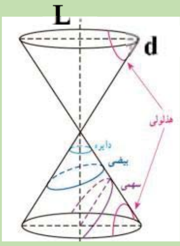

بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر
www.tafrihicenter.ir/edu
کلیک کنید
نمونه سوال
گام به گام
امتحان نهایی
جزوه
دانلود آزمون های آزمایشی
متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم
متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم
www.tafrihicenter.ir

فصل ۶ هندسه

اگر خط d را حول محور L (که با آن متقاطع است) دوران دهیم. دو تا مخروط ایجاد می شود که در راس به هم متصل شده اند . حال اگر رویه مخروطی را با صفحه p قطع دهیم . موارد زیر رخ می دهد .



الف) صفحه p بر محور L عمود باشد . دایره حاصل می شود .

ب) صفحه p بر محور L عمود نباشد و موازی مولد d هم نباشد بیضی حاصل می شود .

ج) صفحه p موازی محور L مخروط باشد . هذلولی حاصل می شود .

د) صفحه p موازی مولد d باشد . سهمی حاصل می شود .

ه) صفحه p از راس دو مخروط بگذرد . نقطه حاصل می شود .

اگر کره را با یک صفحه قطع دهیم همواره سطح مقطع دایره خواهد بود .

اگر یک استوانه قائم را با یک صفحه قطع دهیم ممکن است مستطیل ، بیضی ، دایره ایجاد شود .

اگر پاره خطی حول محوری موازی خودش دوران کند سطح استوانه حاصل می شود .

اگر یک مستطیل حول یکی از اضلاعش دوران کند استوانه ساخته می شود .

اگر یک مربع یا لوزی حول یک قطر خود دوران کند دو مخروط حاصل می شود .

۱۲۳)جا های خالی را با عبارات مناسب پر کنید .

۱ – شکل حاصل از دوران یک ربع دایره حول شعاع عمود بر قطر آن یک .... است .

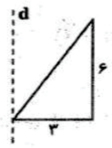
۲ – شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه ....است .

۳ – شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وتر آن .... است .

۴ – اگر یک لوزی با طول قطر های ۶ و ۴ را حول قطر بزرگ آن دوران دهیم حجم شکل حاصل .... است .

۱) نیمکره ۲) مخروط ۳) دو مخروط هم قاعده ۴) دو مخروط هم قاعده به حجم 8π

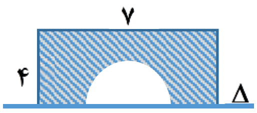
۱۲۴) اگر مثلث قائم الزاویه شکل روبرو را حول خط d دوران دهیم حجم شکل حاصل را به دست آورید .



با این دوران حجم حاصل عملا تفاضل حجم استوانه از مخروط خواهد بود.

$$\underbrace{V}_{\text{حجم مورد نظر}} = \underbrace{Vo}_{\text{حجم استوانه}} - \underbrace{V_m}_{\text{حجم مخروط}} = \pi(۳)^۲(۶) - \frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲(۶) = ۳۶\pi$$

۱۲۵)در شکل مقابل حجم حاصل از دوران شکل ، حول خط Δ هنگامی که قطر نیم دایره ۴ باشد را به دست آورید.



با این دوران حجم حاصل عملاً تفاضل حجم استوانه ای با شعاع ۴ و ارتفاع ۷ و یک کره با شعاع ۲ خواهد بود .

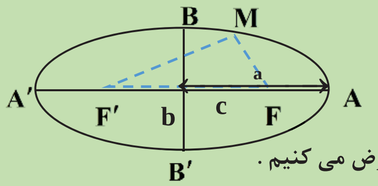
$$\underbrace{V}_{\text{حجم مورد نظر}} = \underbrace{Vo}_{\text{حجم استوانه}} - \underbrace{V_k}_{\text{حجم کره}} = \pi(۴)^۲(۷) - \frac{۴}{۳}\pi(۲)^۳ = \pi(\frac{۳۰۴}{۳})$$

بیضی

بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن ها از دو نقطه ثابت (کانون ها F' , F) مقدار ثابت $۲a$ است که $۲a$ طول قطر بزرگ یا کانونی بیضی نامیده می شود .

$$AA' = ۲a \quad , \quad BB' = ۲b \quad , \quad FF' = ۲c \quad , \quad MF + MF' = ۲a \quad , \quad a^۲ = b^۲ + c^۲$$

قطر کانونی   قطر نا کانونی   فاصله کانونی



در شکل مقابل

۱) نقاط F و F' را کانون های بیضی می گوییم .

۲) فاصله بین دو کانون را که مقدار ثابتی ا ست فاصله کانونی بیضی می گوییم و آن را برابر $F'F = ۲c$ فرض می کنیم .

۳) پاره خط $A'A$ را قطر بزرگ و محور کانونی و پاره خط $B'B$ را قطر کوچک و محور نا کانونی می گوییم .

مختصات نقاط مهم در بیضی افقی

$$O = \frac{A + A'}{۲} = \frac{B + B'}{۲} = \frac{F + F'}{۲}$$

و

$$O\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix} \quad A\begin{vmatrix}\alpha + a\\ \beta\end{vmatrix} \quad A'\begin{vmatrix}\alpha - a\\ \beta\end{vmatrix} \quad F\begin{vmatrix}\alpha + c\\ \beta\end{vmatrix} \quad F'\begin{vmatrix}\alpha - c\\ \beta\end{vmatrix} \quad B\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta + b\end{vmatrix} \quad B'\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta - b\end{vmatrix}$$

مختصات نقاط مهم در بیضی قائم

$$O\begin{vmatrix}\alpha = \dfrac{x_A + x_{A'}}{۲} = \dfrac{x_B + x_{B'}}{۲} = \dfrac{x_F + x_{F'}}{۲}\\ \beta = \dfrac{y_A + y_{A'}}{۲} = \dfrac{y_B + y_{B'}}{۲} = \dfrac{y_F + y_{F'}}{۲}\end{vmatrix}$$

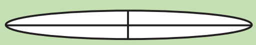
و

$$O\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix} \quad A\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta + a\end{vmatrix} \quad A'\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta - a\end{vmatrix} \quad F\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta + c\end{vmatrix} \quad F'\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta - c\end{vmatrix} \quad B\begin{vmatrix}\alpha + b\\ \beta\end{vmatrix} \quad B'\begin{vmatrix}\alpha - b\\ \beta\end{vmatrix}$$

خروج از مرکز : در هر بیضی نسبت $e = \dfrac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می گویند .

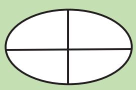
$$۰ < FF' < MF + MF' \quad \Rightarrow \quad ۰ < ۲c < ۲a \quad \Rightarrow \quad ۰ < \frac{c}{a} = e < ۱$$

if $e \to ۱$



خروج از مرکز چاقی و لاغری بیضی را نشان می دهد هرچه کمتر چاق تر

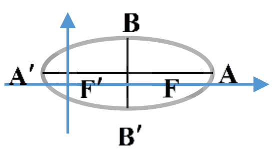
if $e \to ۰$



۱۲۶) کانون های یک بیضی $F(۱۴,۲)$, $F'(۲,۲)$ هستند و خروج از مرکز آن $\dfrac{۳}{۵}$ است . B, B', A , A' را تعیین کنید و نمودار آن را رسم کنید .

$$O = \frac{F + F'}{۲} \Rightarrow O\begin{vmatrix}\alpha = \dfrac{۲ + ۱۴}{۲} = ۸\\ \beta = \dfrac{۲ + ۲}{۲} = ۲\end{vmatrix} \quad , \quad ۲c = |FF'| = \sqrt{(۱۴ - ۲)^۲ + (۲ - ۲)^۲} = ۱۲ \Rightarrow c = ۶ \quad , \quad e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۶}{a} \Rightarrow a = ۱۰$$

$$b = \sqrt{a^۲ - c^۲} = \sqrt{۱۰۰ - ۳۶} = ۸ \quad \Rightarrow \quad A\begin{vmatrix}۸ + ۱۰ = ۱۸\\ ۲\end{vmatrix} \quad A'\begin{vmatrix}۸ - ۱۰ = -۲\\ ۲\end{vmatrix} \quad B\begin{vmatrix}۸\\ ۲ + ۸ = ۱۰\end{vmatrix} \quad B\begin{vmatrix}۸\\ ۲ - ۸ = -۶\end{vmatrix}$$



۱۲۷) اگردر یک بیضی داشته باشیم $B(۱,۴)$, $F(۵,۲)$, $F'(-۳,۲)$ آنگاه خروج از مرکز بیضی را به دست آورید .

$$O = \frac{F + F'}{۲} \Rightarrow O\begin{vmatrix}\alpha = \dfrac{-۳ + ۵}{۲} = ۱\\ \beta = \dfrac{۲ + ۲}{۲} = ۲\end{vmatrix} \quad , \quad \begin{cases}۲c = |FF'| = ۵ - (-۳) = ۸ \Rightarrow \quad c = ۴\\ B(\alpha, \beta + b) = (۱,۴) \Rightarrow ۲ + b = ۴ \Rightarrow b = ۲\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = \sqrt{b^۲ + c^۲} = \sqrt{۴ + ۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}\\ e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{۴}{۲\sqrt{۵}} = \dfrac{۲}{\sqrt{۵}}\end{cases}$$

دایره

معادله استاندارد دایره : معادله دایره ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع R به صورت : $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$ است .

معادله فرم گسترده دایره : اگر معادله فرم استاندارد دایره را بسط دهیم و مرتب بنویسیم فرم گسترده معادله دایره را خواهیم داشت .
$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ در این حالت داریم :

$$\begin{cases}a=-۲\alpha\\ b=-۲\beta\\ c=\alpha^۲+\beta^۲-R^۲\end{cases}\Rightarrow O\begin{cases}\alpha=\dfrac{-a}{۲}\\ \beta=\dfrac{-b}{۲}\end{cases}\quad,\quad R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲-c}$$

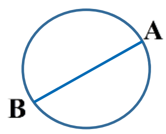
۱) در فرم گسترده باید ضرائب $x^۲ , y^۲$ برابر باشند و همواره باید : $a^۲+b^۲-۴c>۰$

۲) برای نوشتن معادله دایره داشتن مختصات مرکز و شعاع دایره الزامی است مگر آنکه در مسئله اطلاعاتی بدهند که بتوان آنها را محاسبه کرد .

۳) در نوشتن و حل مسائل دایره از رسم کردن غافل نشوید به خصوص هنگامی که ایده خاصی ندارید و چیزی به ذهنتان نمی رسد پیاده کردن داده های مسئله روی شکل راه حل را به ذهن ما القاء می کند .

۴) در بعضی از سوالات میگه مرکز دایره روی خط $y=mx+n$ قرار داره ویا میگه $y=mx+n$ معادله یک قطر دایره است . در این سوالات مرکز را به صورت $O\begin{cases}\alpha\\ \beta=m\alpha+n\end{cases}$ نشان دهید .

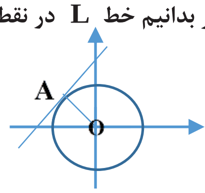
۱۲۸) معادله دایره ای را بنویسید که نقاط $A(۲,۴)$, $B(-۲,۲)$ دو سر یک قطر آن باشند .



$$O=\frac{A+B}{۲}\Rightarrow O\begin{cases}\alpha=\dfrac{-۲+۲}{۲}=۰\\ \beta=\dfrac{۲+۴}{۲}=۳\end{cases}\Rightarrow R=\frac{۱}{۲}|AB|=\frac{۱}{۲}\sqrt{(۲+۲)^۲+(۴-۲)^۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰}=\sqrt{۵}$$

$$(x-۰)^۲+(y-۳)^۲=۵$$

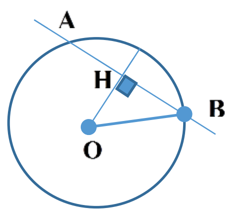
۱۲۹) اگر بدانیم خط L در نقطه $(-۳,۴)$ بر دایره ای به مرکز مبداء مختصات مماس است . معادله خط مماس را بنویسید .



$$M_{OA}=\frac{۴}{-۳}\Rightarrow M'=\frac{۳}{۴}\Rightarrow L_A:\ y-۴=\frac{۳}{۴}(x+۳)$$

۱۳۰) دایره ای به مرکز $O(۱,-۱)$ خط $\frac{۳}{۲}x-۲y+۴=۰$ را در دو نقطه قطع می کندو طول وتر ایجاد شده ۸ است معادله این دایره را بنویسید .

خطی که از مرکز دایره بر وتر وارد و بر آن عمود باشد آن را نصف می کند.



$$OH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{\left|\frac{۳}{۲}+۲+۴\right|}{\sqrt{\frac{۹}{۴}+۴}}=\frac{۷/۵}{\frac{۵}{۲}}\Rightarrow OH=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

$$R^۲=OH^۲+(۴)^۲=۹+۱۶=۲۵\Rightarrow R=۵\Rightarrow (x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۲۵$$

وضعیت دو دایره

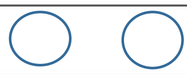
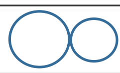
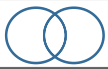
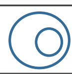
روش حل مسئله

۱- مختصات مراکز دو دایره و همچنین شعاع هریک را به تعیین کنید .

۲- فاصله دو مرکز دایره یعنی $d=|O_1O_2|$ را حساب کنید .

۳- R_1+R_2 , $|R_1-R_2|$ را محاسبه کنید .

۴ - d را با R_1+R_2 , $|R_1-R_2|$ مقایسه کنید .

	متخارج	$d>R_1+R_2$
	مماس خارج	$d=R_1+R_2$
	متقاطع	$\|R_1-R_2\|<d<R_1+R_2$
	مماس داخل	$d=\|R_1-R_2\|$
	متداخل	$d<\|R_2-R_1\|$
	هم مرکز	$d=0$

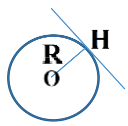
۱۳۱) دو دایره به معادلات : $\begin{cases} x^2+y^2-4x+8y+19=0 \\ x^2+y^2-4x+4y-1=0 \end{cases}$ نسبت به هم چگونه اند ؟

$1)\quad O_1(2,-4)\ ,\quad R_1=\frac{1}{2}\sqrt{16+64-76}=1$

$2)\quad O_2(2,-2)\ ,\quad R_2=\frac{1}{2}\sqrt{16+16+4}=3$, $\begin{cases} R_1+R_2=4 \\ |R_1-R_2|=2 \end{cases} \Rightarrow \quad d=|R_1-R_2|=2$ مماس داخل اند

$3)\quad d=|O_1O_2|=\sqrt{(2-2)^2+(-2+4)^2}=2$

۱۳۲) وضعیت خط به معادله $3x+4y+7=0$ نسبت به دایره $x^2+y^2-2x-3=0$ چگونه است .



خط و دایره بر هم مماس اند

$O\Big|_{0}^{1}\ ,\ R=\frac{1}{2}\sqrt{4+12}=2\ ,\ OH=\frac{|3+7|}{\sqrt{9+16}}=\frac{10}{5}=2 \Rightarrow OH=R$

۱۳۳) وضعیت دو دایره $(x-1)^2+(y-1)^2=4$, $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ نسبت به هم را تعیین کنید .

$o_1\Big|_{1}^{1}\ ,\ R_1=2\ ,\ o_2\Big|_{4}^{1}\ ,\ R_2=\frac{1}{2}\sqrt{4+64-52}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=2$

$d=|o_1o_2|=|4-1|=3\ ,\ R_1+R_2=2+2=4\ ,\ |R_1-R_2|=0\qquad |R_1-R_2|<o_1o_2=d<R_1+R_2$

دو دایره متقاطع اند .